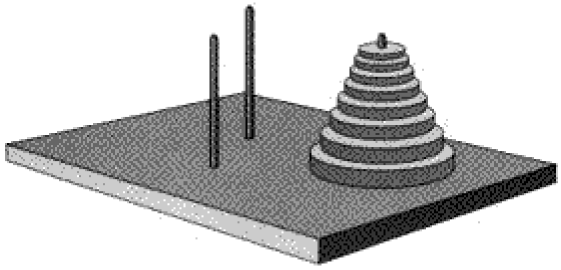
La torre di Hanoi

La **Torre di Hanoi** è formata da otto dischi sovrapposti, di dimensioni decrescenti, bucati al centro e infilati in una delle tre colonnine fissate su una tavoletta.

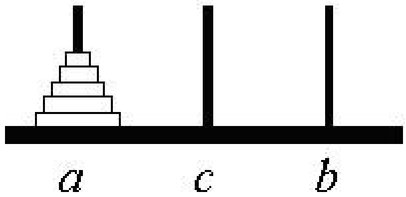


Gli otto dischi, che formano la cosiddetta *torre*, devono poi essere spostati su una delle altre due colonnine libere, seguendo però una regole **precise: si può spostare soltanto un disco alla volta ed è proibito collocare uno qualsiasi dei dischi su uno più piccolo.**

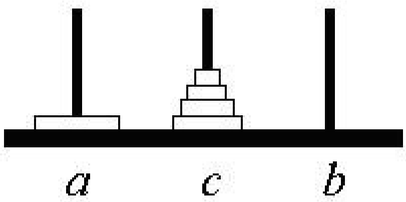
L'idea è questa:

se si sa spostare una torre di $n-1$ dischi, allora si sa spostare anche una torre di n dischi.

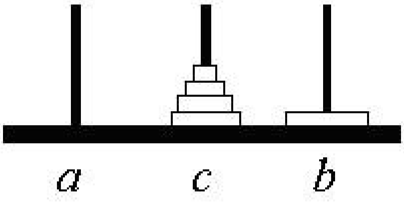
Se la torre si trova sul piolo ***a*** e la si deve spostare sul piolo ***b***, usando anche il piolo ***c*** allora si procede nel modo seguente.

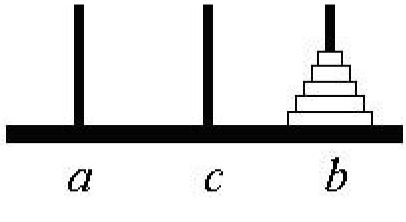


Si sposta prima una torre di $n-1$ dischi dal piolo ***a*** al piolo ***c***,



poi un disco dal piolo ***a*** al piolo ***b*** e di nuovo una torre di $n-1$ dischi da ***c*** a ***b***.





Lo spostamento di una torre di $n-1$ dischi si riduce poi a *due spostamenti* di torri di $n-2$ dischi, e così via, fino ad arrivare a torri di un solo disco che richiedono un unico spostamento (mossa base).

La soluzione (ricorsiva)

Per spostare *N* dischi dalla torre di sinistra alla torre di destra basta:

- supporre di saper spostare gli *N*-1 dischi superiori dalla *torre iniziale* alla *torre di transito*;
- spostare il disco rimasto sulla *torre iniziale* in quella di *destinazione*;
- spostare gli *N*-1 dischi dalla *torre di transito* alla *torre di destinazione*.

ossia

- il problema di grado *N* si può scomporre in due problemi di grado *N*-1, più una **mossa elementare**
- i problemi di grado *N*-1 possono essere affrontati nello stesso modo riducendo via via il grado del problema. Si giungerà a dover spostare dischi singoli (mossa elementare)

La ***storia*** del gioco
http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/GAMEMATH/Hanoi/Hanoi.htm

Il famoso gioco in versione ***javascript*** **http://utenti.quipo.it/base5/jshanoi/hanoi4.htm**

Attività:

Realizzare un programma ***modulare*** che preveda l'inserimento del numero dei dischi che compongono la "***Torre di Hanoi***" e produca, in applicazioni console, come linee di testo, la sequenza richiesta per risolvere il problema con effetto simile a quello illustrato:

```
Torre di Hanoi
Quanti dischi? 5
mossa 1: da 1 ->  a 3
mossa 2: da 1 ->  a 2
mossa 3: da 3 ->  a 2
mossa 4: da 1 ->  a 3
mossa 5: da 2 ->  a 1
mossa 6: da 2 ->  a 3
mossa 7: da 1 ->  a 3
mossa 8: da 1 ->  a 2
mossa 9: da 3 ->  a 2
mossa 10: da 3 ->  a 1
mossa 11: da 2 ->  a 1
mossa 12: da 3 ->  a 2
mossa 13: da 1 ->  a 3
mossa 14: da 1 ->  a 2
mossa 15: da 3 ->  a 2
mossa 16: da 1 ->  a 3
mossa 17: da 2 ->  a 1
mossa 18: da 2 ->  a 3
mossa 19: da 1 ->  a 3
mossa 20: da 2 ->  a 1
mossa 21: da 3 ->  a 2
mossa 22: da 3 ->  a 1
mossa 23: da 2 ->  a 1
mossa 24: da 2 ->  a 3
mossa 25: da 1 ->  a 3
mossa 26: da 1 ->  a 2
mossa 27: da 3 ->  a 2
mossa 28: da 1 ->  a 3
mossa 29: da 2 ->  a 1
mossa 30: da 2 ->  a 3
mossa 31: da 1 ->  a 3

Numero totale mosse per 5 dischi = 31
```

La complessità della soluzione ricorsiva

Cercando un numero che indichi quante mosse servono per trasferire una torre di n dischi, il contatore binario ci suggerisce l'idea che siano necessarie $2^n - 1$ mosse.

Dimostriamolo per ***induzione*** sulla soluzione ricorsiva:

Ipotesi induttiva: una soluzione per una torre di n dischi si compone di $2^n - 1$ mosse.

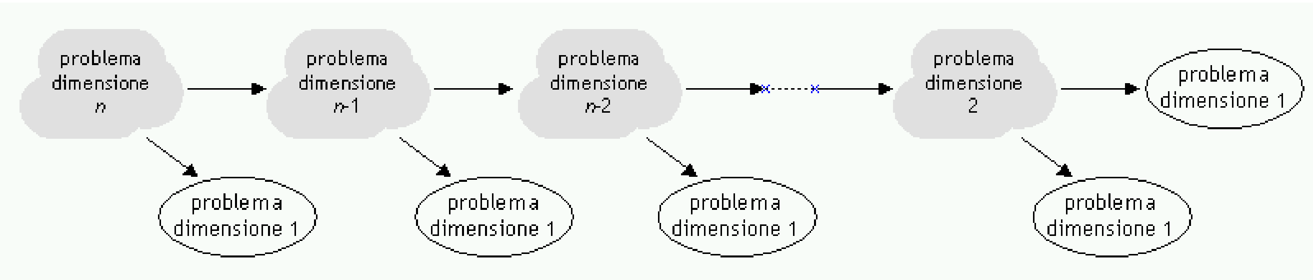
Caso base: la soluzione per la torre con un solo disco si compone di $2^1 - 1 = 1$ mosse.

Passo induttivo: supponendo che per risolvere una torre di $p - 1$ dischi occorrano $2^{p-1} - 1$ mosse, per una torre di p dischi occorreranno $2*(2^{p-1} - 1) + 1 = 2^p - 1$ mosse.

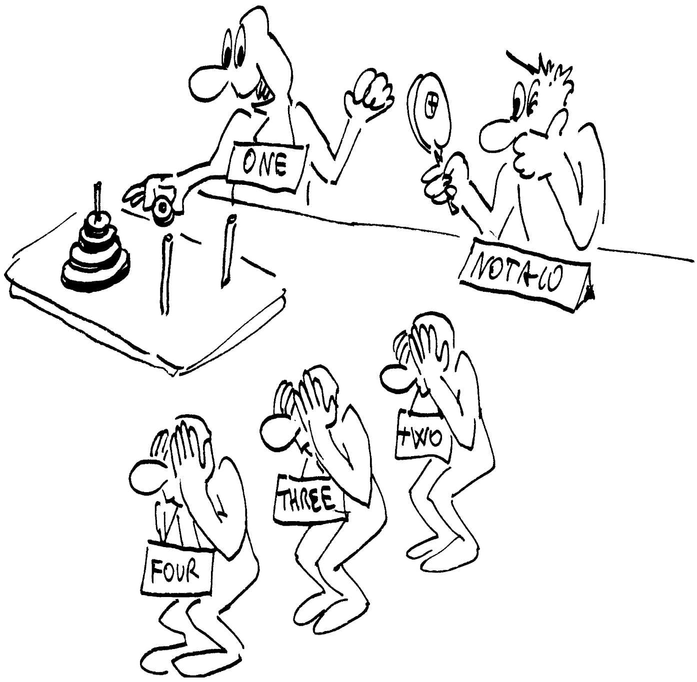
Immagini tratte dal sito: **http://hanoitower.mkolar.org/HThistory.html**

Riproduzione del coperchio della scatola del puzzle originale
"LA TOUR D'HANOI" di Edouard Lucas

Pensiamo ….



Pensiamo alla "**Torre di Hanoi**" e consideriamo il caso di una torre con **5 dischi**.



L'idea è questa: se si sa spostare una torre di $n-1$ dischi, allora si sa spostare anche una torre di *n* dischi.

Se la torre si trova sul piolo *x* e la si deve spostare sul piolo *y*, usando anche il piolo z allora si procede nel modo seguente.

Si sposta prima una torre di $n-1$ dischi dal piolo *x* al piolo *z*, poi un disco dal piolo *x* al piolo *y* e di nuovo una torre di $n-1$ dischi da *z* a *y*.

Lo spostamento di una torre di $n-1$ dischi si riduce poi a due spostamenti di torri di $n-2$ dischi, e così via, fino ad arrivare a torri di un solo disco, cioè a mosse elementari (spostamento di unico disco)

Ricorsione : una versione costruttiva dell'induzione

Il **principio di induzione**, per poter essere applicato, richiede di aver già individuato la proprietà che si vuole dimostrare, e non fornisce nessuno strumento per "scoprire" questa proprietà!

Ricorsione: possibilità di definire insieme infinito di oggetti con **regola finita**
→ **possibilità di descrivere** un **insieme infinito di computazioni** con **programma finito**

Il termine **ricorsione** indica la possibilità di descrivere un processo in termini di se stesso

Definizione ricorsiva: definizione di una classe di "oggetti" in termini di una sottoclasse degli "oggetti" stessi.

Consiste in due fasi:
1) **BASE**: si definiscono uno o più "oggetti"
2) **PASSO Induttivo**: si definiscono altri "oggetti" a partire da quelli già definiti